выбором $\varepsilon > 0$, ибо в ε-окрестности нуля

$$|B - A| \leqslant c\varepsilon^2, \qquad |(B - A)'| \leqslant c\varepsilon.$$

Итак, C топологически эквивалентно A.

Но C, как и A, имеет лишь одну неподвижную точку O. Следовательно, гомеоморфизм, переводящий A в C, оставляет O на месте. ■

§ 14. У-системы

В этом параграфе определяются У-диффеоморфизмы и У-потоки и обсуждаются их применения в теории геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны и в других вопросах.

А. Определение У-диффеоморфизма.

Анализ рассмотренного выше автоморфизма тора показывает, что существенно для предыдущих рассуждений только сжимающееся и расширяющееся слоение; поэтому можно ввести общее определение гиперболического диффеоморфизма, не предполагая более, что M — тор.

Пусть $A\colon M \to M$ — диффеоморфизм компактного многообразия. Предположим, что

1) касательное пространство к M в каждой точке разложено в прямую сумму двух подпространств:

$$T_x M = X_x \oplus Y_x;$$

2) поля плоскостей $X = \{X_x\}$ и $Y = \{Y_x\}$ непрерывны и инвариантны относительно диффеоморфизма A;

3) для некоторой римановой метрики диффеоморфизм A сжимает плоскости первого поля и растягивает плоскости второго: существует число $\lambda < 1$, такое, что для любой точки x из M

$$\|A_*\xi\| \leqslant \lambda\|\xi\| \quad \forall \xi \in X_x, \qquad \|A_*\eta\| \geqslant \lambda^{-1}\|\eta\| \quad \forall \eta \in Y_x.$$

Тогда говорят, что A есть *У-система.*

Пример. Пусть $M = T^2$ — тор,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— его автоморфизм. Тогда A есть У-система.

Действительно, собственные направления соответствующего автоморфизма плоскости определяют на торе инвариантные поля направлений: сжимающееся и растягивающееся.

Замечание.

1. Вместо выписанных неравенств можно требовать на вид более слабого условия

$$\left\| A_*^n\Big|_X \right\| \leqslant c\lambda^n, \quad n > 0; \qquad \left\| A_*^n\Big|_Y \right\| \leqslant c\lambda^{-n}, \quad n < 0.$$

Если это условие выполнено для одной метрики, то оно (возможно, с другим c) выполняется и для любой другой. Из этого условия вытекают и приведенные выше неравенства (возможно, для измененной метрики).

2. В определении не требуется *гладкости* полей плоскостей X и Y. Диффеоморфизм тора, близкий к автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

является всегда У-системой, однако его сжимающееся и растягивающееся поле направлений могут не принадлежать классу C_2 даже в случае, когда диффеоморфизм аналитический (в многомерном случае поля плоскостей могут не принадлежать даже классу C^1).

3. Определение и термин У-система предложены Д. В. Аносовым. Название происходит от первой буквы слова *условие.* Аносов назвал условия 1–3 условиями У и предлагал, чтобы по-английски их называли conditions C; он предложил также называть У-диффеоморфизмы У-каскадами. Смейл ввел для них же термин «диффеоморфизмы Аносова».

Б. Свойства У-диффеоморфизмов.

Теорема (Аносова). *Каждый У-диффеоморфизм структурно устойчив.*

Доказательство проводится тем же методом, как в § 13 для автоморфизмов тора; детали можно найти, например, в статье Дж. Мазера (*Мазер Д.* Диффеоморфизмы Аносова. Математика. 13:2, 1969, 142–144).

Первоначальное доказательство было связано со следующим свойством У-диффеоморфизмов.

Теорема. *Сжимающееся и расширяющееся поля плоскостей У-диффеоморфизма вполне интегрируемы.*

Иными словами, существуют сжимающееся и расширяющееся слоения[1], касательные плоскости к которым образуют сжимающееся и расширяющееся поля плоскостей. Заметим, что здесь нельзя пользоваться теоремой Фробениуса, так как наши поля негладкие.

Доказательство основано на том, что при применении У-диффеоморфизма угол между плоскостями, не слишком далекими от плоскостей расширяющегося поля, уменьшается: расширяющееся поле является притягивающей неподвижной точкой в функциональном пространстве полей плоскостей при действии У-диффеоморфизма на это пространство.

Чтобы построить расширяющееся слоение, можно разбить многообразие на достаточно малые области и взять в каждой из них произвольное слоение, слои которого имеют размерность плоскостей расширяющегося поля и образуют с этими плоскостями не слишком большой угол. Применим к этим слоениям У-диффеоморфизм и его итерации. Оказывается, полученная последовательность кусочных слоений сходится к настоящему расширяющемуся слоению.

Замечание. Частным случаем этой конструкции является построение входящего и выходящего инвариантных многообразий неподвижной точки диффеоморфизма в случае, когда модули всех собственных чисел линейной части диффеоморфизма отличны от единицы. Для построения выходящего многообразия можно применять итерации диффеоморфизма к любому многообразию, касающемуся выходящего инвариантного подпространства линейной части диффеоморфизма.

Описанная конструкция позволяет построить сжимающееся и расширяющееся слоения не только для данного У-диффеоморфизма, но сразу и для близких к нему У-диффеоморфизмов. Таким образом, свойство быть У-диффеоморфизмом сохраняется при малом (с производными) шевелении диффеоморфизма. Кроме того, из конструкции видно, что сжимающееся и расширяющееся слоения (или лучше поля плоскостей) непрерывно зависят от диффеоморфизма.

[1] Слоением на n-мерном многообразии называется его разбиение на подмногообразия (слои) одинаковой размерности k, удовлетворяющее следующему условию: у каждой точки многообразия существует окрестность, разбиение которой на связные компоненты слоев диффеоморфно разбиению n-мерного куба на параллельные k-мерные плоскости.

После того как сжимающееся и расширяющееся слоения для исходного и для возмущенного диффеоморфизмов построены, доказательство теоремы Аносова уже не сложно.

Действительно, рассмотрим какую-либо фазовую точку и последовательность ее образов при исходном диффеоморфизме. Рассмотрим систему ε-окрестностей точек-образов. Число ε выбирается малым и по нему подбирается расстояние от возмущенного диффеоморфизма до невозмущенного. Если это расстояние достаточно мало, то каждая из ε-окрестностей расслоена на связные компоненты слоев сжимающегося расслоения как для исходного, так и для возмущенного диффеоморфизма.

Мы будем называть эти компоненты вертикальными *дисками*. Рассмотрим вертикальный диск исходного слоения, проходящий через исходную точку, и его образы под действием положительных степеней исходного У-диффеоморфизма.

Существует единственный вертикальный диск возмущенного слоения, такой, что его образы под действием положительных степеней возмущенного диффеоморфизма остаются внутри описанных выше ε-окрестностей.

Действительно, исходный У-диффеоморфизм растягивает в горизонтальном направлении. Поэтому возмущенный диффеоморфизм также растягивает в горизонтальном направлении.

Обозначим описанные выше окрестности через U_n, их расслоения на возмущенные вертикальные диски через $U_n \to B_n$, возмущенный диффеоморфизм — через A. Поскольку в горизонтальном направлении A растягивает, отображение A^{-1} индуцирует *сжимающие* отображения $a_n\colon B_n \to B_{n-1}$. Искомая точка $b_0 \in B_0$ определяется теперь как

$$b_0 = \bigcap_{n\to+\infty} a_1 a_2 \ldots a_n B_n.$$

Точно так же существует единственный горизонтальный возмущенный диск, образы которого при применении отрицательных степеней нашего диффеоморфизма не выходят из окрестностей с отрицательными номерами.

Пересечение построенных возмущенных дисков — горизонтального и вертикального — определяет ту точку, которую сопрягающий гомеоморфизм сопоставляет исходной фазовой точке.

Проверка того, что описанная конструкция действительно определяет гомеоморфизм, сопрягающий невозмущенный У-диффеоморфизм с возмущенным, не представляет особых трудностей после всего, сказанного выше.

У-диффеоморфизмы с инвариантной мерой, заданной положительной плотностью, имеют всюду плотное множество периодических точек (циклов). Весьма полное исследование эргодических свойств У-диффеоморфизмов с инвариантной мерой (перемешивание и т. д.) проведено Д. В. Аносовым и Я. Г. Синаем (см. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **90** (1967), 3–209).

В. У-потоки.

При переходе к однопараметрическим группам диффеоморфизмов определение гиперболичности следует несколько изменить, так как вдоль фазовых кривых не происходит ни сжатия, ни растяжения.

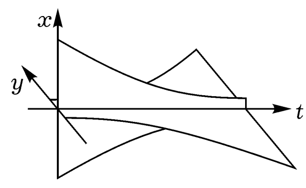

Рис. 85

Рассмотрим интегральные кривые в случае седла $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$ (рис. 85). Ось t является пересечением двух плоскостей, составленных из интегральных кривых, приближающихся к ней при $t \to +\infty$ (плоскость (x, t)) и при $t \to -\infty$ (плоскость (y, t)); остальные интегральные кривые удаляются от оси как при $t \to +\infty$ так и при $t \to -\infty$.

Однопараметрическая группа диффеоморфизмов называется У-*потоком*, если фазовые кривые вблизи любой данной фазовой кривой расположены так, как интегральные кривые в приведенном выше примере. Формальное определение состоит в следующем.

Определение. Пусть M — компактное гладкое многообразие, v — векторное поле без особых точек на M, $\{g^t\}$ — соответствующий фазовый поток. Предположим, что

1) касательное пространство к M в каждой точке представлено в виде прямой суммы трех подпространств

$$T_x M = X_x \oplus Y_x \oplus Z_x;$$

2) поля плоскостей X, Y, Z непрерывны и инвариантны относительно фазового потока;

3) поле Z порождено полем фазовой скорости;

4) для некоторых положительных констант c, λ, и некоторой римановой метрики на M

$$\left\| g^t_* \Big|_X \right\| \leqslant ce^{-\lambda t} \text{ при } t > 0, \qquad \left\| g^t_* \Big|_Y \right\| \leqslant ce^{\lambda t} \text{ при } t < 0.$$

Тогда фазовый поток называется У-*потоком*, а уравнение $\dot{x}=v(x)$ — У-*системой.*

Пример. Рассмотрим трехмерное многообразие M, которое получается из прямого произведения тора на отрезок $[0, 1]$ склейкой торцевых торов по У-автоморфизму: $(x, 1)$ склеивается с $(Ax, 0)$, где $x \in T^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим векторное поле, направленное вдоль сомножителя $[0, 1]$ в прямом произведении $T^2 \times [0, 1]$. Это поле после склейки M из прямого произведения превращается в гладкое (почему?) поле v на M.

Полученное поле v определяет У-поток на M.

Теорема. *Всякий У-поток структурно устойчив.*

Доказательство.

Доказывается таким же методом, как для У-диффеоморфизмов (см. цитированные выше работы). ■

Всякий У-поток имеет бесконечное множество замкнутых фазовых кривых. Таким образом, даже ограничиваясь структурно устойчивыми векторными полями, нельзя надеяться получить в многомерном случае такую же простую картину с конечным числом положений равновесия и циклов, как в случае систем на двумерной сфере.

В 1961 г. С. Смейл построил первые примеры структурно устойчивых систем с бесконечным числом циклов. В этих примерах экспоненциальное разбегание имело место не на всем фазовом пространстве, а на некотором замкнутом его подмножестве. Такие множества теперь называют гиперболическими. Общая теория гиперболических множеств была построена позже и под влиянием теории У-систем.

Появление подобных примеров привело к резкому изменению представлений о поведении фазовых кривых многомерных систем. Некоторые специалисты поспешили объявить эти результаты не имеющими реального значения, так как подобные системы, хотя и структурно устойчивы, «не могут описывать никаких реальных, физических процессов» ввиду неустойчивости отдельных траекторий.

Однако имеются весьма важные реальные случаи, когда, по-видимому, именно системы с экспоненциальным разбиением траекторий лучше всего описывают действительность. Речь идет о математическом описании явлений типа турбулентности и о движении соударяющихся частиц (скажем, в моделях газа из твердых сфер). Более простой, но вполне реальной является задача о движении по геодезическим на многообразиях отрицательной кривизны. Мы разберем сейчас самый простой вариант этой задачи — задачу о геодезических на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Для этого нам потребуются некоторые сведения из геометрии Лобачевского.

Г. Плоскость Лобачевского.

Плоскостью Лобачевского называется верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с метрикой[1]

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \quad \text{где} \quad z = x+iy.$$

Прямая $y=0$ называется *абсолютом.* Заметим, что углы в этой метрике совпадают с евклидовыми углами, и что расстояние до абсолюта бесконечно.

Теорема. *Геодезическими плоскости Лобачевского являются все окружности и прямые, ортогональные абсолюту, и только они* (рис. 86).

Доказательство.

Метрика инвариантна относительно 1) переносов вдоль абсолюта; 2) растяжений от начала координат; 3) симметрии $z \longmapsto -\overline{z}$ (это очевидно). Нетрудно проверить, что 4) метрика инвариантна также и относительно инверсии $z \longmapsto \overline{z}^{-1}$.

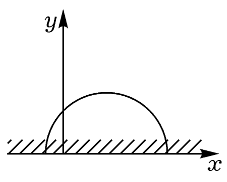

Рис. 86

Из 1)–4) вытекает инвариантность метрики относительно всех дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости в себя. Кроме того, из 3) следует, что ось y геодезическая. Но дробно-линейным вещественным преобразованием можно перевести ось y в любую окружность или прямую, ортогональную абсолюту. Следовательно, все они — геодезические.

[1] А также любое риманово многообразие, изометричное указанному.

Обратно, через каждую точку по каждому направлению проходит окружность или прямая, ортогональная абсолюту. Следовательно, других геодезических нет. ■

Замечание. Одновременно доказано, что движения (сохраняющие метрику и ориентацию) плоскости Лобачевского — это дробно-линейные преобразования верхней полуплоскости в себя.

Теорема. *Окружностями на плоскости Лобачевского являются все евклидовы окружности, не пересекающие абсолют, и только они.*

Доказательство.

Рассмотрим единичный круг. Дробно-линейным преобразованием можно перевести верхнюю полуплоскость в единичный круг (ср. гл. I, § 5. п. Д). Поэтому внутренность единичного круга можно также рассматривать как модель плоскости Лобачевского (рис. 34).

Дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, переходят при этом в дробно-линейные преобразования, сохраняющие единичный круг. Поэтому метрика плоскости Лобачевского в модели на круге инвариантна относительно всех дробно-линейных преобразований, сохраняющих круг.

Но среди этих преобразований есть повороты вокруг центра. Следовательно, все точки евклидовой окружности, имеющей с единичным кругом общий центр, равноудалены от этого центра в смысле метрики Лобачевского. Итак, евклидова окружность является окружностью Лобачевского, если ее центр — в центре круга.

Но любая евклидова окружность, не пересекающая абсолюта, может быть движением плоскости Лобачевского превращена в евклидову окружность с центром в начале координат. Следовательно, всякая евклидова окружность, не пересекающая абсолюта, является окружностью в смысле метрики Лобачевского (как в модели на круге, так и в модели на полуплоскости). Отсюда следует, что и обратно всякая окружность Лобачевского является евклидовой окружностью. ■

Определение. Предел последовательности касающихся в одной точке окружностей растущего радиуса на плоскости Лобачевского называется *орициклом.*

Теорема. *Орициклами на плоскости Лобачевского являются евклидовы окружности или прямые, касающиеся абсолюта, и только они.*

Доказательство.

Рассмотрим полугеодезическую, выходящую из некоторой точки плоскости Лобачевского (рис. 87). Выберем на этой полугеодезической точку на расстоянии t от исходной точки. Тогда окружность радиуса t с центром в построенной точке проходит через исходную точку перпендикулярно геодезической. Пусть теперь t стремится к плюс бесконечности. Тогда в евклидовом смысле построенная окружность стремится к окружности, перпендикулярной рассматриваемой геодезической и проходящей через ее точку на абсолюте. Эта евклидова окружность касается абсолюта. ■

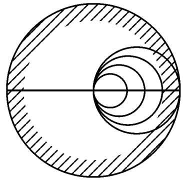

Рис. 87

Замечание 1. Таким же предельным переходом при $t \to \infty$ можно строить орициклы на поверхностях отрицательной кривизны и орисферы на многообразиях отрицательной кривизны.

Замечание 2. Через каждую точку плоскости Лобачевского проходят два орицикла с общей касательной; они получаются из предыдущей конструкции при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

Д. Геодезические потоки на поверхностях отрицательной кривизны.

Пусть M — риманово многообразие. Мы будем предполагать, что M полно как метрическое пространство. Например, любое компактное многообразие полно; плоскость Лобачевского полна, так как расстояние до абсолюта бесконечно.

Рассмотрим множество всех касательных векторов к многообразию M, имеющих длину 1. Это множество является многообразием размерности $2n - 1$, если M имеет размерность n. Оно обозначается через $T_1 M$.

Определение. *Геодезическим потоком* на M называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия касательных векторов длины 1, определенная следующим образом: каждый вектор за время t сдвигается вперед вдоль касающейся его геодезической на расстояние t, оставаясь касательным к этой геодезической.

Теорема. *Геодезический поток на плоскости Лобачевского удовлетворяет условиям* 1)–4) *определения У-потока.*

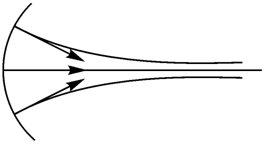

Рис. 88

Доказательство.

1°. Построим сжимающееся и расширяющееся слоения. С этой целью для каждого вектора построим ортогональный ему орицикл, являющийся пределом окружностей, центры которых расположены впереди точки приложения этого вектора. Снабдим этот орицикл в каждой точке нормальным ему единичным вектором, так, чтобы получилось непрерывное поле нормальных векторов (рис. 88).

Заметим, что если бы мы начали с любого из этих векторов, то мы получили бы тот же самый орицикл с тем же полем. Этот орицикл с полем можно рассматривать как кривую в трехмерном пространстве $T_1 M$ единичных касательных векторов плоскости Лобачевского. Таким образом, мы построили одномерное слоение в $T_1 M$ — разбиение пространства единичных касательных векторов на кривые. Это разбиение есть сжимающееся слоение.

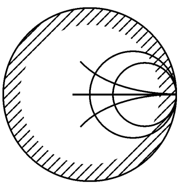

Рис. 89

Расширяющееся слоение строится таким же образом, начиная от окружностей, центры которых расположены сзади точки приложения вектора.

2°. Условия 2, 3 выражают инвариантность геодезических и орициклов относительно геодезического потока и проверяются непосредственно. Действительно, семейство геодезических, перпендикулярных одному орициклу, пересекает абсолют в точке касания абсолюта с орициклом, а всякий орицикл, касающийся абсолюта в этой точке, ортогонален всем геодезическим семейства (рис. 89).

Поэтому геодезический поток переводит каждый орицикл (оснащенный полем нормалей) в орицикл, касающийся абсолюта в той же точке (и также оснащенный полем нормалей).

3°. Условие 1 означает, что касательные векторы к геодезической, оснащенной касательным полем, и к обоим орициклам, оснащенным нормальными полями, линейно независимы. Оно проверяется непосредственно: важно лишь, что касание обоих орициклов — первого, а не более высокого порядка.

4°. Докажем, что отрезки сжимающегося орицикла под действием фазового потока экспоненциально сжимаются. Предположим, что начальный орицикл — прямая $y = 1$ на верхней полуплоскости. Геодезические — прямые $x = \text{const}$, геодезический поток за время t превращает прямую $y = 1$ в прямую $y = e^t$ (расстояние вдоль оси y от точки 1 до точки y равно $\ln y$). Следовательно, каждый отрезок орицикла переходит в отрезок, длина которого в e^t раз меньше. Отсюда следует, что фазовый поток сжимает слои сжимающегося слоения (в смысле естественной метрики на $T_1 M$).

Проверка условия 4 определения У-системы заканчивается аналогичным рассуждением для расширяющихся орициклов. ■

Следствие. *Геодезический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны является У-потоком.*

Доказательство.

Заменой времени можно свести все к случаю кривизны -1. Для поверхности постоянной отрицательной кривизны -1 универсальной накрывающей является плоскость Лобачевского; поверхность получается из плоскости Лобачевского отождествлением точек, переходящих друг в друга под действием некоторой дискретной группы движений плоскости Лобачевского (рис. 90).

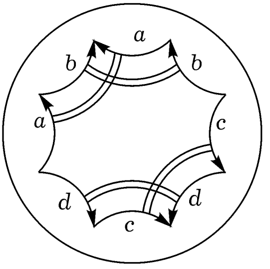

Рис. 90

При этом отождествлении геодезические, окружности, орициклы плоскости Лобачевского проектируются в геодезические, окружности, орициклы поверхности; геодезический поток на поверхности и его сжимающееся и растягивающееся слоения проектируются в такие же слоения для поверхности. ■

В частности, отсюда следует, *что геодезический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны структурно устойчив и имеет всюду плотное множество замкнутых геодезических.*

Замечание. Для многомерного многообразия отрицательной кривизны (не обязательно постоянной) геодезический поток также является У-потоком. Доказательство близко к приведенному выше для простейшего случая: немного сложнее лишь доказательство существования орициклов (орисфер). См. цитированную выше книгу Д. В. Аносова.

E. Биллиардные системы

Рассмотрим геодезический поток на поверхности эллипсоида.

Предположим, что малая ось эллипсоида уменьшается до нуля, так что эллипсоид уплощается и превращается в эллипс. Геодезический поток в пределе переходит в так называемую биллиардную систему в области, ограниченной эллипсом: точка движется по прямой внутри области, а от границы отражается по закону «угол падения равен углу отражения» (рис. 91).

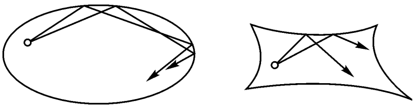

Рис. 91

Биллиардная траектория внутри эллипса никогда не бывает всюду плотной. Но для областей, ограниченных другими кривыми (например, негладкими кривыми, обращенными выпуклостью внутрь области), биллиардное движение обладает почти такими же свойствами экспоненциальной неустойчивости траекторий и перемешивания, как У-потоки.

Рассмотрим, в частности, биллиардную систему на торе с дыркой. Эту систему можно рассматривать как предел геодезических потоков на поверхности кренделя (крендель вырождается в двусторонний тор с дыркой так же, как эллипсоид в двусторонний эллипс). Более того, двусторонний тор с плоской метрикой и с дыркой можно считать предельным случаем кренделя отрицательной кривизны (при вырождении вся кривизна собралась вдоль края дыры). Поэтому неудивительно, что эта биллиардная система обладает свойствами У-потока.

Имеется надежда, что соображения, близкие к гиперболической теории, позволят доказать эргодичность системы твердых шаров в ящике, со времени Больцмана постулируемую в статистической механике. (Эргодичность означает, что каждое инвариантное подмножество фазового пространства имеет меру нуль, либо полную меру; она влечет совпадение почти всюду временных и пространственных средних. В данном случае под фазовым пространством понимается множество уровня энергии.) В плоском случае доказательство опубликовано Я. Г. Синаем (*Я. Г. Синай.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов. УМН **25**, 2 (1970), 141–192). О биллиардных системах см. также: *Л. А. Бунимович.* О биллиардах, близких к рассеивающим. Матем. сборник **94**, 1 (1974), 49–73.

Ж. У-системы и прогонка.

Гиперболическая ситуация возникает в задачах вычислительной математики, решаемых методом прогонки. Предположим, для примера, что мы хотим решить краевую задачу для уравнения второго порядка $\ddot{x} = x$ (т. е. для системы $\dot{x} = p, \dot{p} = x$) на отрезке $[0, T]$. Предположим, что заданы неоднородные граничные условия: начальная точка $\varphi(0)$ с координатами $(x(0), p(0))$ лежит на заданной прямой l_0 фазовой плоскости (x, p), а конечная точка $\varphi(T)$ — на заданной прямой l_T.

Если бы начальная точка $\varphi(0)$ была известна, то при попытке решить задачу Коши с начальным условием $\varphi(0)$ мы столкнулись бы с потерей точности, экспоненциально растущей с длиной T отрезка интегрирования. Действительно, решения с начальным условием, пропорциональным растягивающемуся вектору $(1, 1)$, экспоненциально растут. Таким образом, при переходе от плоскости $t = 0$ к плоскости $t = T$ происходит растяжение в направлении вектора $(1, 1)$ (в дальнейшем это направление называется горизонтальным) и сжатие в направлении вектора $(1, -1)$ (называемого вертикальным, см. рис. 92).

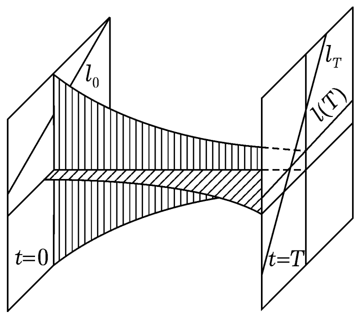

Рис. 92

Рассмотрим теперь образ прямой l_0 под действием нашего преобразования. Хотя образ каждой точки прямой находится с экспоненциально большой потерей точности, образ самой прямой определяется, вообще говоря, весьма точно.

Действительно, направление этого образа близко, вообще говоря, к горизонтальному направлению.

Поэтому ошибка в вычислении точки на этой почти горизонтальной прямой мало влияет на положение прямой: у ошибки может быть велика как раз горизонтальная компонента, а вертикальная мала.

Точку $\varphi(T)$ мы находим как пересечение прямой l_T и образа прямой l_0. Теперь для окончательного определения решения нужно решать задачу Коши назад. При этом ошибка по горизонтали не растет, а вертикальная компонента точки $\varphi(t)$ фиксирована тем, что эта точка лежит на уже найденной прямой $l(t) = g^t l_0$. Таким образом, сначала мы, переходя от 0 к T, находим прямые $l(t)$, а потом, возвращаясь от T к 0, выбираем на каждой из них по точке — и все это без экспоненциальной потери точности.

3. О применениях У-систем.

У-системы и родственные им объекты находятся сейчас в таком же положении, в каком находились предельные циклы во времена Пуанкаре. Весь математический аппарат исследования предельных циклов был создан, но инженерное серьезное применение предельных циклов началось лишь спустя несколько десятков лет, когда развитие радиотехники сделало теорию нелинейных колебаний прикладной областью математики.

С начала 1960-х годов известна гипотеза, что естественной областью применения У-потоков является теория турбулентного движения жидкости. Представим себе замкнутый сосуд, заполненный несжимаемой вязкой жидкостью, приводимой в движение какой-либо внешней силой (мешалкой). Мешалка нужна, чтобы вязкость не погасила со временем всякое движение.

Гидродинамические уравнения Навье–Стокса задают динамическую систему[1] в функциональном пространстве (точками этого бесконечномерного фазового пространства являются бездивергентные векторные поля, поля скоростей жидкости).

Положения равновесия этой динамической системы — это стационарные поля скоростей, т. е. такие движения жидкости, для которых скорость в каждой точке пространства не меняется со временем. Циклам этой системы отвечают периодические движения жидкости, в которых скорость в каждой точке пространства меняется периодически. Такое движение можно иногда наблюдать, открывая водопроводный кран.

Гипотеза о математическом описании турбулентности состоит в том, что дело в сущности сводится к конечномерной динамической системе, так как вязкость быстро гасит высокие гармоники. Иными словами, предполагается, что в бесконечномерном фазовом пространстве имеется конечномерное многообразие или множество, к которо-

[1] По правде говоря, теория уравнений с частными производными до сих пор не может справиться с проблемой существования и единственности решений для трехмерного уравнения Навье–Стокса, но мы пренебрежем этим обстоятельством.

му притягиваются все фазовые кривые; на самом же этом множестве фазовый поток представляет собой У-систему или обладает близкими свойствами экспоненциальной неустойчивости траекторий и перемешивания.

В таком случае наблюдаемые свойства движения жидкости должны быть такими: при любом начальном условии движение довольно быстро выходит на определенный режим; однако этот режим не является ни стационарным, ни периодическим; хотя предельное движение и определяется конечным числом параметров («фаз» предельного режима), сами эти параметры крайне неустойчивы (предельные течения с близкими начальными фазами экспоненциально расходятся); впрочем, статистические характеристики течения от этих неустойчивых фаз не зависят.

В этом направлении пока сделано следующее. Если вязкость достаточно велика, система Навье–Стокса имеет единственную неподвижную точку, к которой притягиваются все фазовые кривые. Это т. н. ламинарное движение. Всякое другое течение под воздействием вязкости со временем стремится превратиться в ламинарное. С уменьшением вязкости ламинарное течение может терять устойчивость, причем возникает устойчивый предельный цикл (см. гл. 6). При дальнейшем уменьшении вязкости может терять устойчивость и цикл, причем из цикла может рождаться более сложное, непериодическое, притягивающее соседей движение. Ожидается, что это движение будет, вообще говоря, обладать свойством экспоненциальной неустойчивости фазовых кривых на притягивающем множестве. Хотя этому вопросу за последние годы посвящено много как теоретических, так и экспериментальных исследований (см., например, обзор *J. B. Mclaughlin, P. C. Martin.* Transition to turbulence of a statically stressed fluid system. Phys. Rev. A **12** (1975), 186–203), указанная выше гипотеза еще далека от теоремы.

Следует, впрочем, заметить, что появление притягивающего множества с экспоненциально неустойчивыми траекториями на нем не обязательно связано с потерей устойчивости ламинарного течения: это множество может возникнуть вдали от положения равновесия и даже при таких значениях вязкости, при которых ламинарное течение еще устойчиво.

§ 15. Структурно устойчивые системы не всюду плотны

В этом параграфе предъявляется свободная от структурно устойчивых систем область в функциональном пространстве гладких динамических систем класса C^1.

А. Пример Смейла.

В 1965 году С. Смейл построил пример диффеоморфизма трехмерного тора, в окрестности которого нет ни одного структурно устойчивого диффеоморфизма.

Следовательно, на четырехмерном многообразии имеется векторное поле, которое нельзя сделать структурно устойчивым посредством малого шевеления.

Позже поля с этим свойством были построены и на трехмерных многообразиях (см. *S. Newhous.* Nondensity of Axiom A (a), Global Analysis, Proceed. Simp. Pure Math. AMS, **14** (1971), 191–203).

В этом параграфе излагается конструкция Смейла.

Б. Описание примера.

Введем на T^3 координаты $(x, y, z \text{ modd } 2\pi)$. Диффеоморфизм $A\colon T^3 \to T^3$ мы определим в окрестностях тора T^2: $z = 0$ и некоторого интервала оси z (вид диффеоморфизма A в остальной части трехмерного тора нам не важен).

В окрестности U тора T^2 отображение A задается формулой

$$A(x,\, y;\, z) = \left(2x + y,\, x + y;\, \frac{z}{2}\right).$$

В окрестности точки O с координатами $(0, 0, \pi)$ отображение A задается формулой

$$A(x,\, y;\, \pi + u) = \left(\frac{x}{2},\, \frac{y}{2};\, \pi + 2u\right).$$

Таким образом, точка O является седловой, причем выходящее инвариантное многообразие —это кривая γ, содержащая интервал $(\pi, \pi - \varepsilon)$ оси z.

Кривая γ инвариантна относительно A и растягивается под действием A; таким образом, итерируя A, мы получим из указанного интервала половину инвариантного многообразия, которая либо заканчивается в неподвижной точке преобразования A, либо имеет бесконечную длину.

Мы потребуем, чтобы кривая эта входила в область U, указанную выше, и там имела неограниченную длину. Нетрудно видеть, что диффеоморфизмы тора с указанными свойствами существуют.

B. Устойчивые свойства диффеоморфизма A.

1°. *Сужение A на достаточно малую окрестность тора T^2 структурно устойчиво.*

Доказательство.

Действительно, это можно доказать с помощью того же приема, которым мы доказали теорему Гробмана–Хартмана. Заменим диффеоморфизм $A\colon T^3 \to T^3$ преобразованием $A'\colon T^2 \times \mathbb{R} \to T^2 \times \mathbb{R}$, заданным всюду той же формулой, которая определяет $\widetilde{A}$ в области U. Близкий к A диффеоморфизм $\widetilde{A}$ можно заменить преобразованием $\widetilde{A}'\colon T^2 \times \mathbb{R} \to T^2 \times \mathbb{R}$, согласованным с $\widetilde{A}$ в окрестности тора $T^2 \times O$ так, что разность $\widetilde{A}' - A'$ имеет компактный носитель и мала в C^1. Теперь мы можем применить теорему Аносова (или, точнее, ее доказательство); получаем топологическую эквивалентность $\widetilde{A}'$ с A' и значит $\widetilde{A}$ с A в окрестности тора T^2. ■

2°. Из доказанного следует, что диффеоморфизм $\widetilde{A}$ имеет инвариантное многообразие $\widetilde{T}^2$, близкое к тору T^2, и на нем — счетное всюду плотное множество периодических точек. Через каждую точку окрестности $\widetilde{U}$ тора $\widetilde{T}^2$ проходит однозначно определенный и непрерывно зависящий от точки гладкий слой двумерного сжимающегося слоения диффеоморфизма $\widetilde{A}$ (он состоит из точек, сближающихся при итерациях диффеоморфизма).

3°. *Преобразование $\widetilde{A}$ имеет неподвижную точку $\widetilde{O}$, близкую к неподвижной точке O преобразования A.*

Доказательство.

Это следует из теоремы о неявной функции, так как точка O невырожденная и диффеоморфизм $\widetilde{A}$ близок к A. ■

Собственные числа линеаризации $\widetilde{A}$ в этой точке $\widetilde{O}$ близки к собственным числам A в O.

По теореме Гробмана–Хартмана, точка $\widetilde{O}$, как и O, является седловой и имеет одномерное выходящее инвариантное многообразие $\widetilde{\gamma}$, близкое, как легко видеть, к γ. В частности, $\widehat{\gamma}$ входит в окрестность $\widetilde{U}$ тора $\widetilde{T}^2$.

4°. Сколь угодно малым шевелением отображения A вдали от $\widetilde{U}$ можно изменить кривую γ так, что она будет «иметь носик»: локально будет лежать по одну сторону от одного из слоев сжимающегося расслоения для A, содержащего одну точку кривой γ, причем касание γ с этим слоем будет первого порядка. Обозначим так определенное отображение через A_1.

Г. Структурная неустойчивость.

Докажем, что *диффеоморфизм A_1, вместе со всеми близкими к нему диффеоморфизмами, структурно неустойчив.*

Доказательство.

Включим отображение A_1 в однопараметрическое семейство диффеоморфизмов A_s, отличающихся лишь малым изменением в окрестности прообраза точки носика при отображении A_1. Каждое из отображений A_s, достаточно близких к A_1, обладает перечисленными выше свойствами A_1: инвариантным тором, двумерными сжимающимися слоями, седловой точкой с выходящим инвариантным многообразием и с носиком на нем. Мы предположим, что с изменением s носик движется поперек слоев сжимающегося слоения.

Рассмотрим теперь сжимающийся слой, содержащий носик. Этот слой может содержать или не содержать периодическую точку на торе. Поскольку периодические точки всюду плотны на торе, сколь угодно малым изменением A_1 в нашем семействе можно поместить носик как на слой содержащий, так и не слой не содержащий периодическую точку.

Но свойство слоя содержать или не содержать периодическую точку топологически инвариантно, поэтому топологический тип A_1 меняется при сколь угодно малом изменении этого отображения. Следовательно, отображение A_1 структурно неустойчиво.

Пусть теперь $\widetilde{A}_1$ — любой диффеоморфизм, достаточно близкий к A_1. Тогда, согласно сказанному в пункте В, для $\widetilde{A}_1$ можно повторить все построение, только что проведенное для A_1. Следовательно, $\widetilde{A}_1$ — структурно неустойчивый диффеоморфизм. ■

Глава 4
Теория возмущений

Большинство дифференциальных уравнений не допускает ни точного аналитического решения, ни сколько-нибудь полного качественного исследования. Теория возмущений представляет собой в высшей степени полезный набор методов исследования уравнений, близких к уравнениям специального вида. Эти уравнения специального вида называются невозмущенными, и их решения предполагаются известными. Теория возмущений учитывает влияние небольших изменений дифференциальных уравнений на поведение решений.

Если величина возмущения характеризуется малым параметром ε, то влияние возмущений на временах порядка 1 приводит к изменению решения на величину порядка ε. Эту величину можно приближенно получить, решая уравнения в вариациях вдоль невозмущенного решения. Однако, если нас интересует поведение решения в течение большого отрезка времени, скажем, порядка ε^{-1}, то возникает гораздо более сложная задача, составляющая предмет т. н. асимптотических методов исследования теории возмущений. Важнейшим из этих методов является метод усреднения, который и рассматривается в настоящей главе.

Метод усреднения используется в небесной механике со времени Лагранжа и Лапласа для определения эволюции планетных орбит под влиянием взаимных возмущений планет друг другом. Гаусс формулировал его так: для определения эволюции следует размазать массу каждой планеты по орбите пропорционально времени, проводимому в каждой части орбиты, и заменить притяжение планет притяжением полученных колец.

Однако обоснование метода усреднения — задача и сейчас далеко не до конца решенная.

§ 16. Метод усреднения

В этом параграфе описывается рецептура метода усреднения в его простейшем варианте. Вопросы обоснования этого метода обсуждаются в следующих параграфах.

А. Невозмущенная и возмущенная системы.

Рассмотрим гладкое расслоение $\pi\colon M \to B$. Векторное поле v на многообразии M называется ***вертикальным***, если оно касается каждого слоя (рис. 93). В приложениях слои обычно бывают торами.

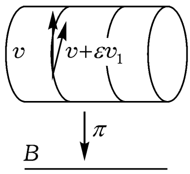

Рис. 93

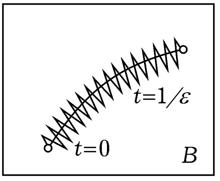

Рис. 94

Функции на базе B расслоения π определяют первые интегралы уравнения $\dot{x}=v(x)$ на M. Векторное вертикальное поле v называется *невозмущенным. Возмущенным полем* называется близкое к v поле $v+\varepsilon v_1$. Рассмотрим возмущенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x) + \varepsilon v_1(x).$$

Каждая фазовая кривая невозмущенного уравнения проектируется при отображении π в одну точку базы. Движение по фазовым кривым возмущенного уравнения проектируется на базу в виде медленного движения, скорость которого порядка ε. Заметное передвижение проекции по базе происходит за время порядка ε^{-1}. Метод усреднения предназначен для описания этого медленного движения по базе при помощи векторного поля на базе. Это медленное движение описывается в методе усреднения как комбинация малых осцилляций в систематической эволюции или дрейфа (рис. 94).

Пример. Рассмотрим планетную систему. Невозмущенные уравнения учитывают только взаимодействие Солнца и планет. В невозмущенном движении планеты движутся по кеплеровским орбитам. Роль возмущения играет взаимное притяжение планет. Роль ε играет отношение массы планет к массе Солнца; это — величина порядка 1/1000.

Характерная единица времени — период обращения вокруг Солнца, т. е. величина порядка года или десятка лет, характерная единица длины — радиус планетной орбиты.

В этом примере M — фазовое пространство, база B — пространство наборов кеплеровых эллипсов, слои-торы, размерность которых равна числу планет (каждый набор кеплеровых эллипсов определяет тор, точка которого задается указанием положений планет на эллипсах). Сдвиг по базе на величину порядка 1 соответствует, таким образом, изменению радиуса орбиты, скажем, вдвое. Время порядка ε^{-1} — это время порядка тысячи или десятка тысяч лет.

Таким образом, систематическое медленное движение (дрейф) по базе со скоростью ε в этом примере за время порядка тысячелетий могло бы изменить радиус орбиты Земли вдвое, что было бы гибельным для нашей цивилизации, которая своим существованием обязана тому, что этот дрейф фактически не происходит (во всяком случае в направлении изменения радиусов орбит; изменение эксцентриситетов происходит и, по-видимому, влияет на ледниковые периоды).

Б. Процедура усреднения.

Для описания усреднения введем несколько обозначений. Мы будем предполагать, что слои нашего расслоения являются n-мерными торами. Расслоение в окрестности каждой точки базы является прямым произведением. Мы ограничимся такой окрестностью и будем задавать точку из пространства расслоения M парой (φ, I), где I — точка базы, а φ — точка n-мерного тора F.

Обозначение I выбрано потому, что координаты $(I_1, \ldots, I_k)$ точки I определяют на M первые интегралы невозмущенной системы. Точка φ тора F задается набором n угловых координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ $\operatorname{modd} 2\pi$. [В приложениях обычно координаты φ_k определены существом дела однозначно, с точностью до выбора начала отсчета на каждом торе и с точностью до целочисленных унимодулярных линейных преобразований. Мы фиксируем систему координат (φ, I).]

Определение. *Невозмущенным уравнением* метода усреднения называется уравнение

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I), \\ \dot{I} = 0, \end{cases}$$

где ω — вертикальное векторное поле, заданное зависящим от точки базы I вектором частот $(\omega_1(I), \ldots, \omega_n(I))$.

Определение. *Возмущенным уравнением* метода усреднения называется уравнение

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{cases}$$

где f и g имеют по φ период 2π, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Угловые координаты φ_i, называются *быстрыми переменными*, а координаты на базе I_j — *медленными переменными*.

Определение. *Усредненным уравнением* называется уравнение

$$\dot{J} = \varepsilon G(J),$$

где $G(J) = \dfrac{\oint g(J, \varphi, 0)\, d\varphi}{\oint d\varphi}$ — среднее значение функции g по слою.

Решения усредненного уравнения называются *усредненными движениями*.

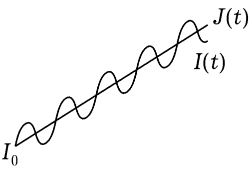

Рис. 95

Пример. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{I} = \varepsilon(a + b\cos\varphi).$$

Усредненное уравнение имеет вид

$$\dot{J} = \varepsilon a.$$

Таким образом, при переходе к усредненному уравнению мы отбрасываем в правой части уравнения для I величины такого же порядка, как оставляемые. На временах порядка 1 как отбрасываемые, так и оставляемые величины дают одинаковый эффект (порядка ε). Однако их влияние на временах порядка ε^{-1} совершенно различно: оставленные члены приводят к систематическому дрейфу, а отброшенные — лишь к малому дрожанию.

Доказательство.

Решение возмущенного уравнения дает (скажем, для $\varphi_0 = 0$)

$$I(t) = I_0 + \varepsilon at + \varepsilon b \sin\frac{\omega t}{\omega},$$

что лишь осциллирующей малой добавкой отличается от решения усредненного уравнения (рис. 95) $J(t) = I_0 + \varepsilon at$. ■

В. Пространственное и временно́е средние.

Рассмотрим отрезок времени T, большой по сравнению с 1, но малый по сравнению с ε^{-1}. За такое время траектория возмущенного движения не успевает заметно сместиться с начального слоя.

Вычислим перемещение проекции возмущенной траектория на базу за время T. Это перемещение — величина порядка $\varepsilon T \ll 1$. Скорость перемещения равна $\varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)$. В первом приближении можно считать здесь I постоянным, ε равным нулю и φ меняющимся в соответствии с невозмущенным уравнением. Тогда для величины перемещения за время T мы получим приближенное выражение

$$\Delta I = \varepsilon T \left[\frac{1}{T} \int\limits_0^T g(I, \varphi(t), 0)\, dt \right] + o(\varepsilon T).$$

Наше время $T \gg 1$ велико, поэтому величина, стоящая в квадратной скобке, близка к временному среднему функции g.

Введем медленное время $\tau = \varepsilon t$. Изменению t от 0 до ε^{-1} соответствует изменение τ от 0 до 1. Будем обозначать скорости движений по отношению к медленному времени штрихом. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\Delta I}{\Delta \tau} \approx \text{ временно́е среднее } g, \qquad I' = \text{ временно́е среднее } g.$$

Заменим временное среднее пространственным. Тогда получится усредненное уравнение

$$J' = G(J), \qquad G = \text{ пространственное среднее } g.$$

Таким образом, переход к усредненному уравнению соответствует замене временных средних вдоль невозмущенного движения пространственными.

Г. Обсуждение.

Применение метода усреднения состоит в том, что возмущенное уравнение заменяется гораздо более простым усредненным уравнением. Решения усредненного уравнения исследуются на отрезках времени порядка ε^{-1} (т.е. на отрезках медленного времени порядка 1). Затем делаются выводы о поведении возмущенного движения в течение времени порядка ε^{-1} (обычно — выводы о том, что I-компонента решения возмущенного уравнения близка к решению усредненного уравнения в течение времени ε^{-1}).

Это заключение не вытекает из предыдущих рассуждений и нуждается в обосновании. Действительно, при выводе усредненного уравнения мы заменяли временные средние пространственными. Эта замена разумна, если траектория невозмущенного движения равномерно распределена на торе размерности n, т. е. когда частоты несоизмеримы. Однако при резонансах траектория невозмущенного движения всюду плотно заполняет не n-мерный тор, а тор меньшей размерности. Поэтому замена временного среднего пространственным средним по n-мерному тору вблизи резонансов явно незаконна.

И действительно, существуют примеры, которые показывают, что различие между проекцией возмущенной траектории на базу и решением усредненного уравнения за время ε^{-1} достигает величины порядка 1: усредненный дрейф и проекция истинного движения направлены в разные стороны.

Практически единственный до конца изученный случай — это случай одночастотных систем, когда слои — одномерные торы, т. е. окружности.

§ 17. Усреднение в одночастотных системах

Здесь формулируется и доказывается теорема, обосновывающая метод усреднения для одночастотных систем.

А. Формулировка теоремы.

Рассмотрим фазовое пространство M, являющееся прямым произведением области B евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ и окружности S^1. Угловая координата на окружности обозначается через $\varphi \mod 2\pi$, а точка из B обозначается через I.

Возмущенное уравнение

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I,\, \varphi,\, \varepsilon), \\ \dot{I} = \varepsilon g(I,\, \varphi,\, \varepsilon), \end{cases}$$

с 2π-периодическими по φ функциями f и g дает усредненное уравнение

$$\dot{J} = \varepsilon G(J), \qquad G(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(J,\, \varphi,\, 0)\, d\varphi.$$

Рассмотрим начальную точку I_0 из B и предположим, что решение $J(t)$ усредненного уравнения с начальным условием $J(0) = I_0$ остается в области B в течение времени $t = T\varepsilon^{-1}$ (т. е., что в течение медленного времени $\tau = T$ решение уравнения $\dfrac{dJ}{d\tau} = G(J)$ с начальным условием I_0 не покидает B).

Теорема. *Предположим, что частота ω не обращается в нуль в области B. Тогда расстояние между значением решения усредненного уравнения $J(t)$ и I-компонентой решения возмущенного уравнения $I(t)$ с $I(0) = J(0)$ остается малым в течение времени $t \in [0, T\varepsilon^{-1}]$, если ε достаточно мало*:

$$|I(t) - J(t)| \leqslant C\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит от ε.

Б. Основная конструкция.

Основная идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы постараться уничтожить возмущение при помощи подходящей замены переменных. Эта идея имеет много приложений (см., например, предыдущую и следующую главы) и является основой всего формального аппарата теории возмущений.

Выберем вместо I новую координату $P = I + \varepsilon R(I, \varphi)$ так, чтобы P-компонента решения перестала осциллировать. Для этого в правой части уравнения для $\dot{P}$ мы хотим уничтожить члены порядка ε, зависящие от φ.

Иными словами, мы постараемся построить диффеоморфизм многообразия M, $(I, \varphi) \longmapsto (P, \varphi)$ так, чтобы возмущенное поле перешло в поле, имеющее на каждом слое почти постоянную (с точностью до ошибки порядка ε^2) проекцию на базу.

Дифференцируя $P = I + \varepsilon h(I, \varphi)$ по времени и собирая члены первого порядка по ε, мы получаем

$$\dot{P} = \varepsilon\left[g + \omega\frac{\partial h}{\partial\varphi}\right] + r,$$

где аргумент ε у функции g заменен нулем; остаток r (как мы ниже проверим) есть величина второго порядка малости относительно ε.

Постараемся выбрать h так, чтобы уничтожить члены первого порядка по ε, т. е. чтобы квадратная скобка обратилась в нуль. Мы получаем формально

$$h(I,\,\varphi) = -\frac{1}{\omega(I)}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} g(I,\,\psi,0)\,d\psi.$$

(Здесь используется условие теоремы $\omega \neq 0$.) В действительности такой способ решения уравнения $g + \omega\dfrac{\partial h}{\partial\varphi} = 0$ незаконен, так как функция h должна быть 2π-периодической по φ, чтобы отображение $(I,\,\varphi) \longmapsto (P,\,\varphi)$ было определено на M.

Предыдущая формула определяет функцию h на окружности (а не на накрывающей ее прямой), лишь если среднее значение функции g по окружности равно нулю.

Таким образом, выбор h позволяет уничтожить не все возмущение g, а лишь его осциллирующую часть

$$\widetilde{g}(I,\,\varphi,\,0) = g(I,\,\varphi,\,0) - G(I).$$

Среднее по периоду функции $\widetilde{g}$ уже равно нулю, и мы можем определить периодическую функцию h формулой

$$h(I,\,\varphi) = -\frac{1}{\omega(I)}\int\limits_{0}^{\varphi} \widetilde{g}(I,\,\psi,0)\,d\psi. \tag{1}$$

Теперь для P получается уравнение

$$\dot{P} = \varepsilon G(P) + \varepsilon R.$$

Это уравнение малой величиной εR порядка ε^2 отличается от усредненного уравнения

$$\dot{J} = \varepsilon G(J).$$

Поэтому решения расходятся со скоростью порядка ε^2 и, следовательно, за время ε^{-1} разойдутся на расстояние порядка ε. Отличие P от I есть также величина порядка ε. Поэтому и расстояние между $I(t)$ и $J(t)$ остается величиной порядка ε в течение времени порядка ε^{-1}.

Доказательство этого утверждения требует еще проведения (простых) оценок отброшенных выше членов.

В. Оценки.

1°. *Обозначения.* Пусть $K \subset B$ — компактная выпуклая область, содержащая точку I_0. Мы предполагаем, что $J(t)$ не выходит на границу K в течение времени $T\varepsilon^{-1}$. Будем обозначать через $|\cdot|_0$ и $|\cdot|_1$ нормы в пространствах C^0 и C^1 (максимум модуля функции в максимум модулей функции и ее первой производной). Обозначим через c_1 такую постоянную, что для I из K

$$|f|_1 \leqslant c_1, \qquad |g|_1 \leqslant c_1, \qquad |\omega^{-1}|_1 \leqslant c_1.$$

2°. Докажем, что *отображение* $A\colon (I, \varphi) \longmapsto (P, \varphi)$ — *диффеоморфизм* $K \times S^1$ *при достаточно малых* ε.

Доказательство.

Из определения h (формула 1) следует, что $h \in C^1$. Значит $|\varepsilon h|_1 < 1$ при достаточно малых ε. Если бы две точки при отображении A перешли в одну, разность значений εh в этих точках была бы равна разности значений I; это противоречит неравенству $|\varepsilon h|_1 < 1$, так как область K выпуклая. Из $|\varepsilon h|_1 < 1$ вытекает также, что A локальный диффеоморфизм. Итак, A — диффеоморфизм. ■

3°. *Оценка величины* R. Имеем

$$R(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi, \varepsilon) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

$$R_1 = g(I, \varphi, 0) - g(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi, 0), \quad R_2 = g(I, \varphi, \varepsilon) - g(I, \varphi, 0),$$

$$R_3 = h(I, \varphi) - h(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi), \qquad R_4 = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)\frac{\partial h}{\partial I},$$

$$R_5 = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon)\frac{\partial h}{\partial \varphi}.$$

Предположим, что I и $P(I, \varphi, \varepsilon)$ принадлежат K. Тогда, поскольку

$$P = I + \varepsilon h(I, \varphi),$$

$$|R_1| \leqslant \varepsilon |g|_1 |h|_0, \qquad |R_2| \leqslant \varepsilon |g|_1, \qquad |R_3| \leqslant \varepsilon |h|_1 |h|_0,$$

$$|R_4| \leqslant \varepsilon |h|_1 |g|_0, \qquad |R_5| \leqslant \varepsilon |h|_1 |f|_0.$$

Входящие сюда нормы f, g и h оцениваются через c_1. Окончательно, если I и $P(I, \varphi, \varepsilon)$ принадлежат K, то

$$|R(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi, \varepsilon)| \leqslant c_2 \varepsilon,$$

где $c_2(c_1) > 0$ — не зависящая от I, φ, ε постоянная.

4° *Оценка* $P(t) - J(t)$.

Обозначая штрихом производную по медленному времени $\tau = \varepsilon t$, мы получаем, что P и J удовлетворяют соотношениям

$$P' = G(P) + \varepsilon R(P, \varphi(t), \varepsilon),$$
$$J' = G(J).$$

Следовательно, $P - J = Z$ удовлетворяет неравенству

$$|Z|' \leqslant a|Z| + b,$$

где $a = |G|_1$, $b = c_2\varepsilon$ до тех пор, пока P, I и J остаются в области K.

Обозначим $|Z(0)| = c$. Решая уравнение $z' = az + b$ с начальным условием c, получаем оценку

$$|Z(\tau)| \leqslant (c + b\tau)e^{a\tau},$$

пока P, I, J остаются в области K.

5°. *Окончание доказательства теоремы п. А.*

Доказательство.

Обозначим через c_3 величину $|h|_0$. Тогда $|P(I, \varphi, \varepsilon) - I| \leqslant c_3\varepsilon$.

В то же время доказанная выше оценка дает

$$|P(t) - J(t)| \leqslant c_4\varepsilon, \qquad c_4 = (c_3 + c_2T)e^{aT}$$

при $\varepsilon t \leqslant T$, пока $I(t)$, $P(t) = P(I(t), \varphi(t), \varepsilon)$ и $J(t)$ остаются в K.

Обозначим через ρ расстояние от траектории усредненного движения $\{J(t), \varepsilon t \leqslant T\}$ до границы K. Если $(c_3 + c_4)\varepsilon < \rho$, то, согласно предыдущим оценкам, $I(t)$, $P(t)$ и $J(t)$ не могут выйти на границу K при $\varepsilon t \leqslant T$. Но тогда в течение всего этого времени

$$|I(t) - J(t)| \leqslant |I(t) - P(t)| + |P(t) - J(t)| \leqslant c_3\varepsilon + c_4\varepsilon.$$

■

Г. Пример.

Уравнением Ван-дер Поля называется уравнение

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Это уравнение маятника, в котором добавлено нелинейное «трение», положительное при больших амплитудах и отрицательное при малых.

Невозмущенное уравнение $\ddot{x} = -x$ можно записать в стандартном виде $\dot{\varphi} = -1$, $\dot{I} = 0$, где $\varphi = \arg(x + i\dot{x})$, $2I = x^2 + \dot{x}^2$.

Уравнение для $\dot{I}$ в возмущенном движении имеет вид

$$\dot{I} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}^2 = 2\varepsilon I(1 - 2I\cos^2\varphi)\sin^2\varphi.$$

Усредненное уравнение, следовательно, есть

$$\dot{J} = \varepsilon \left(J - \frac{J^2}{2} \right).$$

Это уравнение имеет отталкивающее положение равновесия $J = 0$ и притягивающее $J = 2$.

Положения равновесия уравнения для J соответствуют циклам возмущенной системы. Доказанная выше теорема позволяет утверждать, что изменение I в возмущенной системе близко к изменению J в усредненной системе в течение времени порядка ε^{-1}. Но если усредненная система имеет невырожденное (например, устойчивое по первому приближению) положение равновесия, то возмущенная система (при достаточно малых ε) будет иметь невырожденный (например, устойчивый по первому приближению) цикл; это легко следует из теоремы о неявной функции.

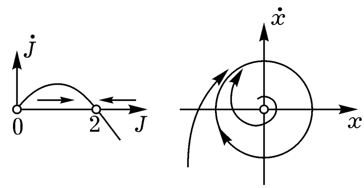

Рис. 96

В частности, уравнение Ван-дер Поля при малых ε имеет устойчивый предельный цикл, близкий к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ (рис. 96).

§ 18. Усреднение в многочастотных системах

Многочастотный случай изучен гораздо хуже, чем одночастотный. В этом параграфе содержится обзор основных результатов в этой области.

А. Резонансные поверхности.

Рассмотрим обычную возмущенную систему метода усреднения

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), & \varphi \in T^n,\ \varepsilon \ll 1,\ \omega \neq 0, \\ \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), & I \in B \subset \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

Вектор частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ называется *резонансным*, если существует целочисленный ненулевой вектор $m = (m_1, \ldots, m_n)$, для которого $(m, \omega) = 0$.

Целочисленный вектор m называется *номером резонанса.*

Точка I из базы B называется *резонансной*, если вектор $\omega(I)$ резонансный. Все резонансные точки I, соответствующие одному резонансу с номером m, образуют в базе B нашего расслоения гиперповерхность

$$\Gamma_m = \{I \in B\colon (m, \omega(I)) = 0\}.$$

Эта поверхность называется *резонансной поверхностью.*

В общем случае как резонансные, так и нерезонансные точки лежат в B всюду плотно (если число частот $n > 1$).

Пример 1. Рассмотрим невозмущенную двухчастотную систему

$$\dot\varphi_1 = I_1, \qquad \dot\varphi_2 = I_2, \qquad \dot I = 0.$$

Здесь B — плоскость с координатами I_1, I_2 (без нуля, т.к. мы предполагаем, что $\omega \neq 0$); резонансные поверхности — это все прямые, проходящие через 0 с рациональным тангенсом угла наклона к оси I_1.

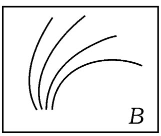

Рис. 97

Как и в этом примере, в общем случае двухчастотной системы резонансные поверхности образуют, вообще говоря, семейство непересекающихся гиперповерхностей (рис. 97; вообще говоря = если ранг $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ максимален). В этом случае при движении точки I по базе эта точка, вообще говоря, трансверсально пересекает резонансные поверхности.

Совершенно по-другому расположены резонансные поверхности в случае, когда число частот 3 или больше.

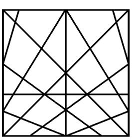

Рис. 98

Пример 2. Рассмотрим невозмущенную трехчастотную систему

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = I_2, \quad \dot\varphi_3 = 1, \quad \dot I = 0.$$

Здесь B — плоскость с координатами I_1, I_2; резонансные поверхности — это все прямые с рациональными уравнениями.

В этом случае при движении точки I по плоскости эта точка если и пересекает трансверсально все резонансные кривые, то, во всяком случае, многие из них пересекает под малыми углами, ибо сколь угодно близко к любому линейному элементу имеется линейный элемент резонансной кривой (рис. 98).

Замечание. Сказанное станет, быть может, понятнее, если рассмотреть отображение базы в проективное $(n-1)$-мерное пространство

$$\Omega\colon\ B \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}, \quad \Omega(I) = (\omega_1(I) : \ldots : \omega_n(I)).$$

Резонансные поверхности — это прообразы рациональных гиперплоскостей в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. В двухчастотном случае $n = 2$ и резонансам соответствуют рациональные точки на проективной прямой.

Если же число частот $n > 2$, то рациональные гиперплоскости образуют связное всюду плотное множество, так что от окрестности любой точки до окрестности любой другой можно добраться по резонансам.

В соответствии со сказанным, в двухчастотных системах основным эффектом является прохождение через резонансы, а при большем числе частот обязательно нужно учитывать также касания с резонансами.

Б. Влияние отдельного резонанса.

Чтобы представить себе возможный эффект одного резонанса, рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Возмущенная система:

$$\dot\varphi_1 = I_1, \qquad \dot\varphi_2 = 1, \qquad \dot I_1 = \varepsilon, \qquad \dot I_2 = \varepsilon\cos\varphi_1.$$

Рассмотрим резонанс $\omega_1 = 0$. Резонансная кривая $I_1 = 0$ пересекается в усредненном движении с ненулевой скоростью. Изменение I_2 в точном решении за время от $-\infty$ до $+\infty$, как нетрудно сосчитать, дается интегралом Френеля

$$\Delta I_2 = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\varphi_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2}\right)dt = c(\varphi_0)\sqrt{\varepsilon}.$$

В усредненной системе J_2 не меняется со временем.

Заметим, что основной вклад в интеграл дает окрестность резонанса шириной порядка $\sqrt{\varepsilon}$; интеграл сам имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ и зависит от начальной фазы φ_0.

Таким образом, в этом простейшем примере пересечение резонанса приводит к рассеянию решений возмущенного уравнения, имеющих общее начальное значение I, на расстояние порядка $\sqrt{\varepsilon}$ друг от друга, причем это рассеяние происходит в окрестности резонансной поверхности ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Появление величин порядка $\sqrt{\varepsilon}$ характерно для всех задач, связанных с прохождением резонанса.

В то время как в первом примере прохождение резонанса приводит лишь к небольшому рассеянию проекций траекторий возмущенной системы на базу по отношению к траекториям усредненной системы, в следующем примере возмущенное и усредненное движения совершенно различны.

Пример 2. Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \qquad \dot{\varphi}_2 = I_2, \qquad \dot{I}_1 = \varepsilon, \qquad \dot{I}_2 = \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Усредненная система:

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \qquad \dot{J}_2 = 0.$$

Усредненное движение с начальным условием $J_1(0) = 1$, $J_2(0) = 1$ при $t = \varepsilon^{-1}$ дает $J_1(t) = 2$, $J_2(t) = 1$.

Возмущенное движение с начальным условием $I_1(0) = 1$, $I_2(0) = 1$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ приводит при $t = \varepsilon^{-1}$ к $I_1(t) = 2$, $I_2(t) = 2$.

Таким образом, проекция возмущенного движения на базу систематически движется совсем не в ту сторону, что траектория усредненного движения. За время $t = \varepsilon^{-1}$ эти две траектории на базе расходятся на большое расстояние (порядка 1).

Причина, по которой усредненное уравнение непригодно для описания рассмотренного возмущенного движения, состоит в том, что эта возмущенная траектория все время остается на резонансной поверхности, а вблизи резонанса усреднение явно неприменимо, так как временное среднее не близко к пространственному среднему по всему n-мерному тору.

Захватывание части траекторий на резонансные режимы характерно для систем с числом частот больше 1.

Пример 3 (А. И. Нейштадт). Рассмотрим систему[1]

$$\dot{\varphi}_1 = I, \qquad \dot{\varphi}_2 = 1, \qquad \dot{I} = \varepsilon(a + \sin\varphi_1 - I).$$

[1] Полученную дописыванием тривиального уравнения $\dot{\varphi}_2 = 1$ из одночастотной системы; резонанс в полученной системе соответствует обращению в 0 частоты в одночастотной.

Для исследования этой системы рассмотрим уравнения маятника с крутящим моментом и трением $\ddot{\varphi} = \varepsilon(a + \sin\varphi - \dot{\varphi})$, к которому она легко сводится. Введем медленное время $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ (интервалу $t \sim \varepsilon^{-1}$ соответствует $\tau \sim \varepsilon^{-1/2}$). Обозначая штрихом производные по медленному времени, получаем уравнение

$$\varphi'' = a + \sin\varphi - \sqrt{\varepsilon}\varphi'.$$

Фазовые портреты при $\varepsilon = 0$ изображены на рис. 99 (U — потенциальная энергия).

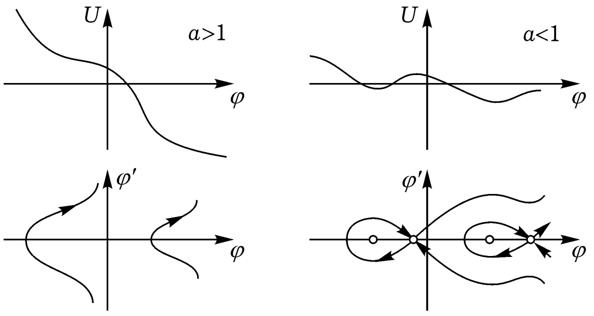

Рис. 99

Мы будем предполагать, что $a > 0$. В зависимости от величины крутящего момента а возможны два случая. Если $a > 1$ (крутящий момент велик по сравнению с колебательным), то член $\sin\varphi$ не играет существенной роли: I меняется монотонно. Прохождению через резонанс $I = 0$ отвечает изменение направления вращения маятника.

Если $a < 1$, то возможен колебательный режим движения маятника (петля внутри сепаратрисы на фазовом портрете). Этот колебательный режим соответствует траекториям, постоянно остающимся вблизи резонанса.

Эффект малого трения $\sqrt{\varepsilon}\varphi'$ состоит в основном в разрушении петли сепаратрисы. Вместо нее на плоскости (φ, φ') появляется узкая (ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$) полоса вдоль неограниченной части сепаратрисы, состоящая из захватываемых притягивающим положением равновесия фазовых точек; вся область внутри сепаратрисы также захватывается (рис. 100).

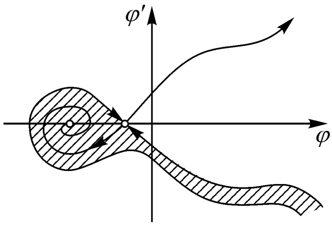

Рис. 100

Возвращаясь к исходной системе, мы обнаруживаем, что при $a < 1$ происходит захватывание в резонанс. При этом в резонанс захватывается малая доля всех траекторий (мера множества начальных условий, (I, φ), захватываемых за время ε^{-1}, порядка $\sqrt{\varepsilon}$). Для этих захватываемых начальных условий различие между изменением медленной переменной I и изменением решения усредненного уравнения J за время ε^{-1} достигает величины порядка 1.

Для остальных же начальных условий (т. е. для всех начальных условий, кроме множества меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$) различие между I и J за время ε^{-1} остается малым (порядка $\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon$, как можно сосчитать).

Если же $a > 1$, то захват в резонанс вообще не происходит.

B. Прохождение через резонансы в двухчастотной системе. Рассмотрим двухчастотную систему с частотами $\omega_1(I)$, $\omega_2(I)$:

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \omega_1 + \varepsilon f_1, & \dot\varphi_2 &= \omega_2 + \varepsilon f_2, \\ \dot I_1 &= \varepsilon g_1, & \dot I_2 &= \varepsilon g_2. \end{aligned}$$

Определение. Система *удовлетворяет условию A*, если скорость изменения отношения частот $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ вдоль траекторий возмущенной системы всюду отлична от нуля:

$$\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}g \neq \omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}g.$$

Система *удовлетворяет условию* $\overline{A}$, если всюду отлична от нуля скорость изменения отношения частот $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ вдоль траектории усредненной системы:

$$\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}G \neq \omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}G.$$

Мы будем предполагать, что все рассматриваемые системы — аналитические.

Теорема. *Если система удовлетворяет условию A, то различие между медленным движением $I(t)$ в возмущенной системе и $J(t)$ в усредненной остается малым в течение времени $t = \varepsilon^{-1}$:*

$$|I(t) - J(t)| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \ \textit{если}\ I(0) = J(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^{-1}.$$

Доказательство основано на том, что выделяется конечное число резонансов с небольшими номерами (большое при малых ε), и вне малых окрестностей выделенных резонансных поверхностей используются обычные замены переменных (см. § 17).

Прохождение окрестностей выделенных резонансов приводит к рассеянию порядка $\sqrt{\varepsilon}$ (как в примерах выше).

Суммируя результаты рассеяния вблизи выделенных резонансов и дрейфа в промежутках между ними, получаем приведенную выше оценку. ∎

Подробности см.: *В. И. Арнольд.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы, ДАН СССР, **161**, 1, 1965; *А. И. Нейштадт.* О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче, ДАН СССР, **22**, 2, 1975; диссертация А. И. Нейштадта «О некоторых резонансных задачах в нелинейных системах», МГУ, 1975, содержит доказательство приведенной выше оценки с $\sqrt{\varepsilon}$, взамен первоначальной оценки $\sqrt{\varepsilon}\ln^2\varepsilon$ в первой из цитированных работ.

Теорема (А. И. Нейштадт). *Если система удовлетворяет условию $\overline{A}$ и еще некоторому условию B (выполненному почти всегда), то для всех начальных точек (I_0, φ_0), кроме множества меры, не превосходящей $c_1\sqrt{\varepsilon}$, различие между медленным движением $I(t)$ в возмущенной системе и движением $J(t)$ в усредненной остается малым в течение времени ε^{-1}:*

$$|I(t) - J(t)| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|, \text{ если } I(0) = J(0).$$

Доказательство основано на том, что выделяется конечное число резонансов с небольшими номерами и вне малых окрестностей выделенных резонансных поверхностей используются обычные замены переменных.

При исследовании выделенных резонансов используется усреднение по окружностям, являющимся траекториями невозмущенного движения при резонансе.

С этой целью зафиксируем номер резонанса (m_1, m_2), где m_1 и m_2 взаимно просты, и выберем на торе вместо угловых координат (φ_1, φ_2) новые угловые координаты (γ, δ), где $\gamma = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2$. Скорость изменения угловой координаты γ в невозмущенном движении при резонансе обращается в нуль, так как $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$.

На базе также введем специальную координату $\rho = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Уравнение резонансной поверхности имеет теперь вид $\rho = 0$, так что величина ρ характеризует уклонение от резонанса. Точку резонансной поверхности будем обозначать через σ. В окрестности этой поверхности можно характеризовать точку базы значением расстояния до резонанса, ρ, и проекцией на резонансную поверхность, σ.

Во введенных координатах возмущенная система принимает вид

$$\dot{\gamma} = \rho + \varepsilon F_1, \quad \dot{\delta} = \alpha(I) + \varepsilon F_2, \quad \dot{\rho} = \varepsilon F_3, \quad \dot{\sigma} = \varepsilon F_4,$$

где функции F_k, имеют по γ и δ период 2π.

Усреднение по траекториям резонансного движения сводится к усреднению по δ. Усредненная система имеет вид

$$\dot{\gamma} = \rho + \varepsilon G_1, \quad \dot{\rho} = \varepsilon G_3, \quad \dot{\sigma} = \varepsilon G_4.$$

Функции G_k, имеют период 2π по γ и зависят также от ρ и ε.

Введем медленное время $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ и нормированное расстояние от резонанса $r = \dfrac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда, обозначая производные по τ штрихом, запишем усредненное уравнение в виде

$$\gamma' = r + \sqrt{\varepsilon}G_1, \quad r' = G_3, \quad \sigma' = \sqrt{\varepsilon}G_4.$$

Аргументами у функций G_k являются γ, $\sqrt{\varepsilon}r$, σ и ε.

Полагая в этом уравнении $\varepsilon = 0$, получаем в качестве первого приближения уравнение

$$\gamma' = r, \quad r' = u(\gamma, \sigma), \quad \sigma' = 0.$$

Таким образом, в первом приближении получается уравнение маятника с крутящим моментом, зависящее от параметра σ. Гамильтоновость полученного уравнения первого приближения — удивительный факт, обнаружившийся в результате вычислений и отнюдь не очевидный заранее.

Рассмотрим фазовый портрет уравнения первого приближения на плоскости (γ, r). Он выглядит как в примере 3 п. Б при $a < 1$ или при $a > 1$, в зависимости от того, меняет ли знак функция u.

Оказывается, что петли сепаратрисы возникают лишь для небольшого числа резонансов с не слишком большими номерами (здесь используется условие $\overline{A}$). Действительно, из условия $\overline{A}$ вытекает, что среднее значение функции u по γ отлично от нуля. Для резонансов с большими номерами в уравнении первого приближения получается функция u, мало отличающаяся от своего среднего значения (так как усреднение по δ близко в этом случае к усреднению по тору) и поэтому всюду отличная от нуля. Это соответствует маятнику с крутящим моментом, который велик по отношению к качающему моменту. В этом случае уравнение первого приближения не имеет ни положений равновесия, ни колебательной области.

При переходе от уравнения первого приближения к полному уравнению из петли сепаратрисы возникает зона захвата в резонанс, как в примере 3 п. Б[1]. Мера множества захватываемых точек фазового пространства оценивается величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$, если все положения равновесия уравнения первого приближения простые (т. е. если нули функции u простые: $u = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} \neq 0\Big)$. Это ограничение простоты и есть условие B теоремы Нейштадта. Заметим, что условие накладывается на уравнения первого приближения, соответствующие конечному числу резонансов (поскольку при условии $\overline{A}$ только для конечного числа резонансов уравнения первого приближения имеют положения равновесия).

Доказательство теоремы завершается соединением оценок изменения величин I в нерезонансных промежутках и вблизи резонансов — в незахватываемой части фазового пространства. Подробности см. в цитированной выше диссертации Нейштадта. ■

Замечание. Для двухчастотных систем остался неисследованным случай, когда условие $\overline{A}$ нарушается, т. е когда отношение частот быстрого движения в усредненном движении меняется немонотонно. Такое поведение невозможно в случае одномерной базы, но если число медленных переменных I два или больше, то поворот отношения частот вспять есть явление общего положения, неустранимое шевелением системы.

Г. Многочастотные системы.

Случаи, когда число частот больше двух, изучен гораздо слабее, чем двухчастотный. Для систем общего положения частоты быстрого движения несоизмеримы для почти всех значений медленных переменных. Поэтому естественно ожидать, что для большинства начальных условий метод усреднения правильно описывает эволюцию медленных переменных на отрезках времени порядка ε^{-1}.

Первые общие теоремы в этом направлении принадлежат Д. В. Аносову (*Д. В. Аносов.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнении с быстроколеблющимися решениями. Изв. АН СССР, сер. матем., **24**, 5 (1960), 721–742) и Т. Касуге (*T. Casuga.* On the adiabatic theorem for the hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics. I, II, III, Proc. Japan acad. **37** 7, 1961).

Теорема Аносова утверждает, что для любого положительного числа ρ мера множества начальных условий (из компакта в фазовом про-

[1] В отличие от примера п. Б, в общем случае «захваченные» траектории не обязаны навсегда оставаться вблизи резонанса.

странстве), для которых

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon} |I(t) - J(t)| > \rho \text{ при } I(0) = J(0)$$

стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю (здесь, как обычно, I — проекция возмущенного движения, а J — усредненное движение; предполагается, что частоты независимы, в том смысле, что ранг производной частот по медленным переменным $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ равен числу быстрых переменных).

Эта теорема доказана в действительности при более общих предположениях: условная периодичность быстрых движений не предполагается, а предполагается эргодичность быстрого движения на почти всех торах; как обычно, предполагается, что решение усредненного уравнения J продолжается на время ε^{-1}.

Множество малой вместе с ε меры, где возможны большие уклонения от усредненного движения за время ε^{-1}, соответствует всем траекториям, захватываемым в резонанс или блуждающим вдоль резонансных поверхностей, переходя с одной на другую, что также возможно, если число частот больше двух.

Представляет интерес реалистическая оценка меры этого множества. Например, для двухчастотных систем из результатов Нейштадта (см. п. В) следует оценка $|I(t) - J(t)| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|$ вне множества меры не более $c_1\sqrt{\varepsilon}$ (при небольших ограничениях на систему).

Предположим, что частоты независимы, т. е. что ранг $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ равен числу частот.

Теорема (А. И. Нейштадт). *Для системы с независимыми частотами вне множества малой меры $\varkappa$ погрешность метода усреднения*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon} |I(t) - J(t)| \ \textit{при}\ I(0) = J(0)$$

оценивается сверху величиной $c_3\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\varkappa}$.

Эквивалентная формулировка: обозначим через $E(\varepsilon, \rho)$ множество начальных условий в пределах фиксированного компакта, для которых погрешность достигает величины ρ или большей величины при указанном значении ε.

Тогда

$$\operatorname{mes} E(\varepsilon,\, \rho) \leqslant c_4 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}.$$

Доказательство см. в статье: *А. И. Нейштадт.* Об осреднении в многочастотных системах. II, ДАН СССР, **226**, 6 (1976), 1295–1298. Это доказательство использует идею цитированной выше работы Т. Касуги: замена переменных метода усреднения модифицируется (сглаживается) таким образом, чтобы она задавалась гладкими функциями не только вне окрестностей резонансов, но всюду.

Результат А. И. Нейштадта можно истолковать как указание на статистическую независимость приращений отклонения I от J на последовательных отрезках времени длины 1. Действительно, приращение $I - J$ за время T порядка 1 имеет величину порядка ε, а число интервалов длины T в интервале ε^{-1} имеет порядок ε^{-1}. Если бы приращения на каждом интервале длины T были независимы, ожидаемое приращение за время ε^{-1} оказалось бы, по законам теории вероятности, пропорциональным произведению приращения за время T на корень из числа испытаний, т. е. оказалось бы величиной порядка $\varepsilon\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема Нейштадта дает такой же порядок величины приращения, однако не для всех начальных условий: приходится исключить множество начальных условий меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$, на котором наблюдаются захват в резонанс и большие уклонения, не соответствующие схеме с независимыми приращениями.

Представление о независимости приращений отклонения I от J, по-видимому, может быть обосновано гораздо более полным образом в ситуации, когда быстрое движение является не условно-периодическим, а У-системой. На это указывает, в частности, центральная предельная теорема для функций на фазовом пространстве (*Я. Г. Синай.* Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. ДАН СССР, **133**, 6 (1960), 1303-1306; *М. Е. Ратнер.* Центральная предельная теорема для У-потоков на трехмерных многообразиях. ДАН СССР, **186**, 3 (1969), 519–521). Эта теорема обосновывает сформулированные выше представления для специального случая, когда как медленное, так и быстрое движение не зависит от медленных переменных:

$$\dot{I} = \varepsilon g(\varphi), \qquad \dot{\varphi} = \omega(\varphi).$$

Вероятностные соображения становятся особенно интересными в том случае, когда нас интересует поведение системы на временах, больших по сравнению с ε^{-1} (скажем, порядка $\varepsilon^{-3/2}$ или ε^{-2}). Если за время ε^{-1} происходит захват в резонанс $\sqrt{\varepsilon}$-й доли всех траекторий и если на следующих отрезках времени длины ε^{-1} будут таким же образом захватываться все новые траектории, то через время порядка $\varepsilon^{-3/2}$ большинство траекторий окажется захваченным резонансами и через время ε^{-2} будут наблюдаться лишь резонансные движения. Но, разумеется, независимость захватов на разных отрезках длины ε^{-1} является сильным дополнительным предположением, а наряду с захватом в резонанс происходит и обратный процесс.

Имеющееся в теореме Нейштадта ограничение — независимость частот — существенно сужает область ее применимости. Условие

$$\text{ранг } \frac{\partial\omega}{\partial I} = \text{ числу частот}$$

можно заменить условием независимости отношений частот:

$$\text{ранг отображения } I \longmapsto (\omega_1(I) : \ldots : \omega_n(I)) \text{ равен } n-1.$$

Однако в случае, когда число медленных переменных мало (меньше, чем число частот без единицы) не может выполняться и это условие.

Распространение теоремы Нейштадта на случай, когда число медленных переменных существенно меньше числа частот, требует, в частности, исследования диофантовых приближений на подмногообразиях евклидова пространства.

Для отображений

$$\omega\colon\ \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad k<n,$$

удовлетворяющих условиям невырожденности (отличия от нуля некоторых определителей) ожидается такая же оценка снизу

$$|(m,\omega(I))| \geqslant C|m|^{-\nu}, \qquad m\in\mathbb{Z}^n/0$$

для почти всех I из $\mathbb{R}^k$, какая имеет место для почти всех точек из R^n.

Результаты этого рода получены для специальных кривых ($\omega_s{=}I^s$); см. книгу: *В. Г. Спринджук.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967; относительно общего случая см. работу *А. С. Пяртли.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства. Функциональный анализ **3**, 4 (1969), 59–62.

Заметим, что этими работами не решается ни обсуждаемый вопрос об обобщении теоремы Нейштадта, ни арифметический вопрос о точной оценке ν (не имеющий, впрочем, большого значения для нашей задачи, в которой изменение значения ν будет менять лишь необходимую гладкость уравнений).

В системах общего положения с любым числом быстрых и медленных переменных с достаточно большим числом параметров при почти любом значении параметра мера множества начальных условий, для которых отклонение больше ρ при некотором t на $(0, \frac{1}{\varepsilon})$, не превосходит $C\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}$ и интеграл от отклонения по множеству остальных начальных условий (фазовое пространство предполагается ограниченным) не превосходит $C\sqrt{\varepsilon}$ (имеется в виду максимум отклонения переменных $I(t)$ от $J(t)$ при $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]$).

Если отображение ω не принадлежит некоторому исключительному множеству коразмерности N в функциональном пространстве, то в предыдущих оценках $\sqrt{\varepsilon}$ можно заменить на $\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$, где $n \leqslant C_{k+p}^{p} - k - N + 1$, n — число быстрых, а k — медленных переменных, причем константа C зависит от отображения, но оценка выполняется для всех, а не для почти всех систем (параметр привлекать не нужно).

Сформулированные теоремы В. И. Бахтина (Об усреднении в многочастотных системах, УМН **40**, № 5 (1985), с. 304–305; Функциональный анализ и его приложения, **20**, № 2 (1986), 1–7; см. также обзор: *В. И. Арнольд*, *В. В. Козлов*, *А. И. Нейштадт*. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, стр. 3–304, см. стр. 181) основаны на том, что почти всегда

$$|(m, \omega(I))| + \left|\frac{\partial(m, \omega(I))}{\partial I}\right| \geqslant C_I|m|^{-\nu},\ \nu > n-1,\ \forall m \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}.$$

Отсюда выводится, что средняя по начальным условиям погрешность метода усреднения оценивается сверху для систем общего положения величиной порядка $\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$ при $n \leqslant C_{k+p}^{p} - k$.

Между прочим, эти оценки доставляют новую информацию и в тех размерностях, где теорема Нейштадта применима. Но определитель обращается (нетождественно) в 0. Ибо в условиях теоремы Нейштадта оценивается отклонение в течение времени $\frac{C}{\varepsilon}$, где C зависит от начального условия (чтобы усредненная траектория не успела дойти до поверхности вырождения якобиана), а в теореме Бахтина множество, заметенное выходящими на поверхность вырождения траекториями, включено в выкидываемое множество малой меры.

§ 19. Усреднение в гамильтоновых системах

В этом параграфе кратко описаны особенности усреднения в случае, когда как невозмущенная, так и возмущенная системы гамильтоновы.

А. Вычисление усредненной системы.

Предположим, что в невозмущенной системе введены переменные действие-угол, т. е. такие канонически сопряженные[1] переменные $(I_1, \dots, I_n; \varphi_1, \dots \varphi_n \operatorname{modd} 2\pi)$, что невозмущенная функция Гамильтона H_0 зависит лишь от переменных действия I. Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \qquad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

т. е. при $H = H_0(I)$

$$\dot{\varphi} = \omega(I), \qquad \dot{I} = 0,$$

где вектор частот $\omega(I)$ равен $\dfrac{\partial H_0}{\partial I}$.

Возмущенная система задается функцией Гамильтона $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)$, где функция H_1 имеет по угловым переменным φ период 2π. Следовательно, уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \qquad \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}.$$

Теорема. *В гамильтоновой системе с n степенями свободы и n частотами эволюции медленных переменных не происходит в том смысле, что усредненная система имеет вид $\dot{J} = 0$.*

Доказательство.

При вычислении интеграла от $\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_s}$ по n-мерному тору можно сначала проинтегрировать по переменной φ_s. Этот однократный интеграл равен приращению периодической функции H на периоде, т. е. нулю. ■

[1] Координаты (I, φ) называются ***канонически сопряженными***, если симплектическая структура фазового пространства записывается а виде $\omega = \sum dI_k \wedge d\varphi_k$.

Эта простая теорема показывает, что эволюция медленных переменных в гамильтоновой системе резко отличается от явлений в общих, негамильтоновых системах.

Б. Теорема Колмогорова.

Предположим, что частоты независимы в том смысле, что производная частот по переменным действиям $\dfrac{\partial \omega}{\partial I}$ невырождена. В таком случае, как установил А. Н. Колмогоров (*А. Н. Колмогоров.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. ДАН СССР, **98** 4 (1954), 527–530) при малом гамильтоновом возмущении бо́льшая часть инвариантных торов $I = \mathrm{const}$ лишь немного деформируется, не исчезая: фазовые кривые для большинства начальных условий в возмущенной системе, как и в невозмущенной, заполняют всюду плотно инвариантные торы.

Если отличен от нуля якобиан отображения $(n-1)$-мерной поверхности $H_0(I) = h$ в $(n-1)$-мерное проективное пространство, заданного формулой $I \longmapsto \left(\dfrac{\partial H_0}{\partial I_1} : \ \ldots : \ \dfrac{\partial H_0}{\partial I_n}\right)$, то инвариантные торы возмущенной системы заполняют с точностью до остатка малой меры все $(2n-1)$-мерное многообразие уровня функции Гамильтона $H(I, \varphi) = h$.

В частности, если число частот $n = 2$, то эти двумерные торы делят трехмерное многообразие уровня. Поэтому даже и для тех фазовых кривых, которые не лежат на торах, переменные действия мало меняются в течение бесконечного интервала времени: фазовая кривая, начавшаяся в щели между двумя инвариантными торами, не может из нее выйти.

Если же число частот больше двух, то торы не делят многообразие уровня функции Гамильтона, и некоторые фазовые кривые (образующие множество малой меры) могут, блуждая вблизи резонансных поверхностей между инвариантными торами, уходить далеко от исходных значений переменных действия.

Существуют примеры (*В. И. Арнольд.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. ДАН СССР, **156**, 1 (1964), 9–12), в которых такой уход действительно происходит. Средняя скорость ухода в примерах этого рода экспоненциально малая (порядка $e^{-\sqrt{\varepsilon^{-1}}}$).

В. Теорема Нехорошева.

Оказывается, средняя скорость ухода переменных действия от их начальных значений в любых гамильтоновых системах общего положения настолько мала, что она не улавливается никаким приближением теории возмущений (т. е. не проявляется в виде заметного ухода за время порядка ε^{-N} ни при каком N, где ε — параметр возмущения).

Точнее, Н. Н. Нехорошев (*Н. Н. Нехорошев.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. Функциональный анализ и его приложения. **5**, 4 (1971); *Н. Н. Нехорошев.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. УМН, **32**, 6 (1977), 5–66; см. также его диссертацию, МГУ, 1973) доказал, что для почти всякой невозмущенной функции Гамильтона $H_0(I)$ существуют положительные числа a и b, такие, что средняя скорость изменения переменных действия I в возмущенной системе за время $T = e^{\varepsilon^{-a}}$ не превосходит ε^b.

Заметим, что T растет при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε^{-1}, так что изменение I за время ε^{-N} мало при любом N.

Постоянные a и b зависят от геометрических свойств невозмущенной функции Гамильтона H_0. Например, если функция H_0 строго выпукла (положительно определена матрица $\dfrac{\partial^2 H}{\partial I^2}$), то можно взять $a = \dfrac{2}{6n^2 - 3n + 14}$, $b = \dfrac{3a}{2}$, где n — число частот.

Теорема доказана для почти всех H_0 в том смысле, что исключаются лишь функции H_0, удовлетворяющие бесконечному набору явно выписываемых алгебраических уравнений на коэффициенты Тейлора. Н. Н. Нехорошев называет исключительные функции *некрутыми.* Для некрутых H_0 уход возможен уже за время порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. В примерах экспоненциально медленного ухода (см. п. Б) функция H_0 крутая.

Доказательство теоремы Нехорошева основано на следующем простом свойстве усреднения в гамильтоновой системе.

Предположим, что при некоторых значениях медленных переменных I в гамильтоновой n-частотной системе имеет место резонанс $(m, \omega) = 0$. Тогда вблизи соответствующей резонансной поверхности естественно проводить усреднение не по n-мерным торам, а по резонансным торам меньшей размерности. Размерность резонансного тора равна $n - 1$, если резонанс однократный, т. е. если направление целочисленного вектора m определено однозначно. Если уравнение относительно m $(m, \omega) = 0$ имеет k рационально независимых решений, то траектории быстрого движения всюду плотно заполняют резонансные торы размерности $n - k$, по которым и следует усреднять.

Теорема. *При усреднении по резонансным торам, соответствующим резонансу* $(m, \omega) = 0$, *направление эволюции переменных действия* I *в усредненной системе лежит в плоскости, натянутой на резонансные векторы*[1] m (*в случае однократного резонанса направление эволюции определено однозначно*: *это направление прямой, несущей вектор* m).

Доказательство.

Рассмотрим для простоты случай однократного резонанса. Обозначим через γ угловую координату, не меняющуюся при резонансе: $\gamma = (m, \varphi)$. Для усреднения возмущенной системы достаточно усреднить функцию Гамильтона по быстрым переменным. В результате получим усредненную функцию Гамильтона $H_0 + \varepsilon \overline{H}_1$, где $\overline{H}_1$ зависит от переменных действия и от одной угловой переменной γ.

Уравнения усредненного движения дают теперь

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varphi}.$$

Но $\dfrac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varphi} = \left(\dfrac{\partial \overline{H}_1}{\partial \gamma}\right)\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial \varphi}\right)$ имеет направление вектора $\dfrac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = m$. ■

Теорема Нехорошева выводится из доказанной теоремы на основании следующих соображений. Быстрая эволюция (со скоростью порядка ε) возможна лишь при резонансе и лишь в направлениях, порожденных резонансными векторами. Но условия крутизны, наложенные на H_0 (например, достаточна строгая выпуклость функции H_0) гарантируют нам, что такая эволюция происходит в направлении, выводящем из резонансной поверхности. Следовательно, резонанс нарушается, и эволюция идет лишь короткое время, вследствие чего и получается экспоненциально малая оценка средней скорости эволюции сверху.

[1] Заметим, что аффинная структура в пространстве переменных действия определена однозначно, и отождествление векторов пространства, двойственного к пространству частот, с векторами в пространстве переменных действия также однозначно определено.

Если же условия крутизны нарушаются, то на резонансной поверхности можно найти кривую, касательная к которой во всех точках принадлежит плоскости, натянутой на резонансные векторы. Вдоль такой кривой эволюция может идти со средней скоростью порядка ε, что приводит к уходу переменных действия от их начальных значений за время порядка ε^{-1}.

§ 20. Адиабатические инварианты

Здесь дается обзор основных результатов теории адиабатических инвариантов в гамильтоновых системах с медленно меняющимися параметрами.

А. Понятие адиабатического инварианта.

При рассмотрении гамильтоновых систем с медленно меняющимися параметрами возникает своеобразное явление: величины, вообще независимые, становятся асимптотически (при стремлении к нулю скорости изменения параметров) функциями друг друга.

Например, рассмотрим маятник переменной длины. Длина маятника и амплитуда колебаний, вообще говоря, независимы: если менять длину качающегося маятника, то при возвращении длины маятника к исходному значению амплитуда колебаний, вообще говоря, может измениться произвольным образом, в зависимости от того, как именно менялась длина.

Оказывается, однако, что если изменение длины маятника производить достаточно медленно, то амплитуда колебаний при возвращении длины к прежнему значению почти не изменится. Более того, отношение энергии маятника к частоте будет оставаться почти неизменным в течение всего процесса, хотя как энергия, так и частота при изменении длины маятника меняются.

Величины, асимптотически сохраняющиеся при достаточно медленном изменении параметров гамильтоновой системы, называются адиабатическими инвариантами.

Точнее, рассмотрим систему дифференциальных уравнений Гамильтона $\dot{x} = v(x, \lambda)$, λ — параметр.

Функция I от фазовой точки x и параметра λ называется *адиабатическим инвариантом*, если для любой гладкой (дифференцируемой достаточное число раз) функции $\lambda(\tau)$ медленного времени $\tau = \varepsilon t$ вдоль решения уравнения $\dot{x} = v(x, \lambda(\varepsilon t))$ изменение величины $I(x(t), \lambda(\varepsilon t))$ остается малым на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^{-1}$, если ε достаточно мало.

Б. Построение адиабатического инварианта системы с одной степенью свободы.

Предположим, что функция Гамильтона $H(p, q; \lambda)$ имеет при каждом значении параметра λ замкнутые фазовые кривые $H(p, q; \lambda) = h$ (скажем — окружающие положение равновесия, в котором частота малых колебаний отлична от нуля).

Обозначим через $I(p, q; \lambda)$ площадь, ограниченную фазовой кривой, проходящей через точку с координатами (p, q) при фиксированном значении λ, поделенную (по традиции) на 2π. Величина I называется *переменной действия.*

Пример. Для маятника $H = \frac{ap^2}{2} + \frac{bq^2}{2}$; фазовая кривая $H = h$ — эллипс площади $\pi\sqrt{\frac{2h}{a}}\sqrt{\frac{2h}{b}} = \frac{2\pi h}{\sqrt{ab}}$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{ab}$. Таким образом, для маятника

$$I = \frac{H}{\omega}.$$

Здесь роль параметра λ играет пара (a, b).

Теорема. *Переменная действия I является адиабатическим инвариантом гамильтоновой системы с одной степенью свободы.*

В. Доказательство адиабатической инвариантности действия.

В основе доказательства лежит метод усреднения. Обозначим через φ угловую координату на замкнутых фазовых кривых, выбранную так, чтобы φ менялось вдоль каждой кривой пропорционально времени движения по кривой и вырастало на 2π за каждый оборот (разумеется, угловая координата φ, как и переменная действия I, зависит не только от фазовых координат (p, q), но и от параметра λ).

Тогда уравнение нашей системы при каждом фиксированном значении λ можно записать в виде стандартной невозмущенной системы метода усреднения:

$$\dot{\varphi} = \omega(I, \lambda(\tau)), \quad \dot{I} = 0, \quad \dot{\tau} = 0.$$

Если теперь λ медленно меняется, то вместо невозмущенной системы получится возмущенная

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon f, \quad \dot{I} = \varepsilon g, \quad \dot{\tau} = \varepsilon,$$

где функции f и g периодичны по φ с периодом 2π.

Составим усредненную систему.

Лемма. *Переменная действия является первым интегралом усредненной системы (то есть среднее g по φ равно нулю).*

Доказательство.

Рассмотрим область, ограниченную замкнутой фазовой кривой $I = I_0$ при начальном значении параметра. Согласно теореме об усреднении, образ этой области через любое время t из отрезка $[0, \varepsilon^{-1}]$ есть, с ошибкой порядка ε, область, ограниченная некоторой замкнутой фазовой кривой $I = I_t$ при значении параметра $\lambda = \lambda(\varepsilon t)$.

Но уравнения движения гамильтоновы (хотя и неавтономные). По теореме Лиувилля площадь образа равна площади прообраза. Отсюда следует $I_t = I_0$. ■

Следствие. *Отношение энергии маятника к частоте есть адиабатический инвариант.*

Задача. Шарик движется горизонтально между двумя вертикальными абсолютно упругими стенками, расстояние между которыми медленно меняется. Докажите, что произведение скорости шарика на расстояние между стенками — адиабатический инвариант.

Задача. Заряженная частица движется в магнитном поле, которое мало меняется на протяжении одного ларморовского витка частицы вокруг магнитной силовой линии. Доказать, что адиабатическим инвариантом является отношение квадрата компоненты скорости частицы по нормали к силовой линии к величине напряженности магнитного поля, $\frac{v_\perp^2}{H}$ (см., напр., *Л. А. Арцимович.* Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961).

Г. Адиабатические инварианты многочастотных гамильтоновых систем.

Рассмотрим многочастотную систему уравнений Гамильтона $\dot{p} = -H_q$, $\dot{q} = H_p$, зависящую от параметра λ и допускающую при фиксированном λ переменные действие-угол: $\dot{\varphi} = \omega(I, \lambda)$, $\dot{I} = 0$ (где

$\omega = \dfrac{\partial H_0}{\partial I}$) с функцией Гамильтона $H_0(I, \lambda)$, зависящей от n переменных действия невырожденным образом, так что

$$\det\left(\frac{\partial \omega}{\partial I}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right) \neq 0.$$

Предположим, как и выше, что параметр λ начинает медленно меняться. Изменение p и q описывается уравнениями Гамильтона с переменной функцией H, а поведение переменных I описывается возмущенной системой (мы предполагаем, что $\lambda = \varepsilon t$, где ε — малый параметр).

Лемма. *Возмущенная система является гамильтоновой, с однозначной функцией Гамильтона $H = H_0(I, \lambda) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \lambda, \varepsilon)$.*

Доказательство этой леммы требует либо некоторого проникновения в симплектическую геометрию или гамильтонов формализм (см., например: *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974), либо громоздких вычислений, которые мы опустим.

Следствие. *Переменные действия I являются первыми интегралами усредненной системы.*

Доказательство.

Действительно, усредняемая функция — правая часть уравнения $\dot{I} = -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi}$ является производной периодической функции и потому имеет среднее значение нуль (см. теорему п. А § 19). ■

Соединяя доказанное следствие с теоремой Нейштадта (см. п. Г § 18), мы приходим к следующему выводу:

Изменение переменных действия I в гамильтоновой многочастотной системе с медленно меняющимися параметрами остается меньшим ρ в течение времени ε^{-1}, если пренебречь множеством начальных условий меры не более $c\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}$ в исходном фазовом пространстве (фазовое пространство предполагается здесь компактным, а производная $\dfrac{\partial \omega}{\partial I}$ предполагается невырожденной).

Определение. Функция F от фазовой точки гамильтоновой системы и параметра называется *почти адиабатическим инвариантом*, если для любого $\rho > 0$ мера множества начальных условий в компактном фазовом пространстве, для которых изменение функции F вдоль решения уравнений Гамильтона с медленно меняющимся параметром превосходит ρ за время ε^{-1}, стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю.

Таким образом, *переменные действия* $(I_1, \ldots I_n)$ *являются почти адиабатическими инвариантами невырожденной многочастотной гамильтоновой системы.*

Д. Поведение адиабатических инвариантов при $t \gg \varepsilon^{-1}$. Хотя адиабатический инвариант мало меняется за время ε^{-1}, нет оснований предполагать, что его изменение останется малым за большие отрезки времени (скажем, порядка ε^{-2}) или тем более за бесконечный отрезок времени.

Пример. Рассмотрим маятник с медленно периодически меняющимся параметром

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + a\cos\varepsilon t)x.$$

При сколь угодно малых ε (т. е. при сколь угодно медленном изменении параметра) возможен параметрический резонанс, при котором положение равновесия $x = 0$ становится неустойчивым. Ясно, что при параметрическом резонансе адиабатический инвариант линейного маятника меняется неограниченно (в течение бесконечно большого промежутка времени).

Оказывается, такое поведение адиабатического инварианта в системе с *периодически* медленно меняющимся параметром связано именно с линейностью системы, точнее с независимостью периода колебаний от амплитуды. Если же в гамильтоновой системе с периодически медленно меняющимся параметром производная частоты быстрого движения по переменной действия отлична от нуля, то переменная действия мало меняется в течение бесконечного промежутка времени (см.: *В. И. Арнольд.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона. ДАН СССР, **142**, 4 1962, 758–761).

Доказательство основано на том, что в этой ситуации существуют инвариантные торы, как в теореме Колмогорова (см. п. Б § 19).